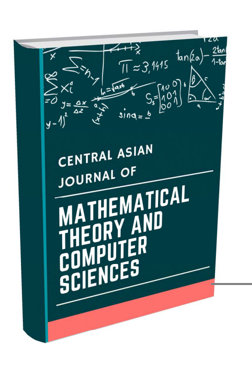


CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 03 Issue: 05 | May 2022 ISSN: 2660-5309

Применение Бета и Гамма функцией к вычислению некоторых важных в прикладных задачах

Х. Абдурасулов, И.А.Ачилов, Б.Б.Каршиев

Каршинский инженерно-экономический институт, Узбекистан, Кашкадарья, Карши город

Аннотация:

В этой статье приводится некоторые применению Бета и Гамма функцией, встречающиеся в прикладных задачах. В ходе данного исследования обсуждались такие логические операции, как практическое применение Бета и Гамма функций и непрерывного вывода, связь между Бета и Гамма функциями.

ARTICLEINFO

Article history:
Received 19 Mar 2022
Revised form 17 Apr 2022
Accepted 21 May 2022

Ключевые слова: Гамма и Бета-фукция интеграл, верхный предел, под интегральная функция, сходится, расходится.

---***---

I. Гамма функция. Гамма функцией (или интегралом Эйлера второго рода) называется интеграл вида

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \qquad (1)$$

Интеграл (1) – функция параметра p – является несобственным, так как верхний предел равен бесконечности и, кроме того, потому что при $x\to 0$ и $p<1$ подинтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл (1) сходится при $p>0$ и расходится $p<0$. Гамма функция является одной из важнейших функций для анализа и его приложений.

Основные свойства гамма функции:

1^0. Функция $\Gamma(p)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\Gamma'(p)$ для $p>0$.

2^0. Имеет место равенство $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ (2).

3^0. После n-кратного применения формулы (2) получается соотношение

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p) \qquad (3).$$

4^0. Если в формуле (3) положит $p=1$ и принять во внимание, что

$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$, то получается равенство $\Gamma(n+1)=n!$ (4), если $n=0$, то $0!=\Gamma(1)=1$.

5^0. Из формулы (2) следует, что если $p\to 0$, то $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\to+\infty$, т.е. $\Gamma(0)=+\infty$.

6^0. При $p=-n$ из формулы (2) следует, что $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$, т.е. $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$ (n=1,2,3,…).

7^0. Так как $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, то $\Gamma(p+1)$ имеет смысл при $-1<p<0$.

Если, $-n<p<-(n-1)$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}$$

С помощью подстановки $p+n=\alpha$, откуда $p=-n+\alpha$, последняя формула преобразуется к виду

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} \qquad (5)$$

и для $-n<p<-(n-1)$ знак $\Gamma(p)$ определяется множителем $(-1)^n$.

8^0. Используется формулу (2), можно получить значения $\Gamma(p)$ для полуцелого аргумента:

$$\Gamma(m+\frac{1}{2})=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!\cdot 2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (6).$$

9^0. Имеет место формула дополнения

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad (0<p<1) \qquad (7).$$

Если в этой формуле положить $p=\dfrac{1}{2}$, то

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi,\ \text{т.е. } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

пользуясь основными свойствами, можно вычислить $\Gamma(p)$ для любого p.

II. Бета-функция. Бета функцией (или интегралом Эйлера первого рода) называется интеграл

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (8)$$

интеграл (8) есть функция двух параметров p и q, сходящейся при $p>0$, $q>0$.

Функция B является симметричной относительно параметров, т.е. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

Если сделать замену переменной интегрирования, пологая $x=\sin^2 t$, $dx=2\sin t\cos t dt$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$, то формула (8) примет вид

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}dt \qquad \text{или}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \ (m>0, n>0) \qquad (9)$$

К интегралом (8) и (9) приводится многие интегралы, встречающиеся в прикладных задачах.

Для вычисления значений Бета-функции пользуются следующей зависимостью между Бета и Гамма функцией:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (10).$$

Если $q = 1-p$, то $\mathrm{B}(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ $(0<p<1)$

используя Бета-функцию, легко найти значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, пусть $p = q = \frac{1}{2}$, тогда $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)}$.

Так как $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, а $\Gamma(1) = 1$, то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

В этой части статье приводится некоторые применению Бета и Гамма функцией, встречающиеся в прикладных задачах.

III. Связь между функциями Бета и Гамма.

1.Пусть $\Gamma(x) = \int_0^{00} t^{x-1} e^{-t} dt$ - Гамма-функция, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ -Бета функция. Доказать, что $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y)$ (1).

Доказательство. Имеем $\Gamma(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1} \tau^{y-1} e^{-t-y} dt d\tau$.

Сделаем замену переменных $t = u(1-v)$, $\tau = u \cdot v$ якобиан данного преобразованные $\frac{D(t,\tau)}{D(u,v)} = u > 0$.

Далее, $t + \tau = u$ $(0 < u < \infty)$, $V = \frac{\tau}{t+\tau}$ $(0 < v < 1)$.

По этому $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^1 u^{x-1}(1-v)^{y-1} v^{y-1} u^{y-1} e^{-u} u du dv = \int_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u} du \int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1} dv =$

$= \Gamma(x+y)B(y,x) = \Gamma(x+y)B(x,y)$.

2. Доказать, что $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$

Доказательство. Для Гамма функции мы установили соотношение $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Применяя это равенство, получаем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\ldots=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Далее $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\left(t=u^2\right)=\int_0^\infty 2e^{-u^2}du=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$.

Пример-1. Найти площадь S фигуры, ограниченной кривой C:

$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1\ (a>0,\ b>0,\ n>0)$ и осями координат.

Решение. Легко видеть, что $x=a\cos^{2|n}\varphi,\quad y=b\sin^{2|n}\varphi\quad(0<\varphi<2\pi)$-есть параметрические уравнения кривой C.

По этому $S=\frac{1}{2}\int_\Gamma(xdy-ydx)$, где Г- контур, состоящий из кривой с и отрезков осей координат.

Далее $S=\frac{1}{2}\int_C(xdy-ydx)+\frac{1}{2}\int_b^0(0,dy+y\cdot 0)+\frac{1}{2}\int_d^a(x\cdot 0-0\cdot dx)=\frac{1}{2}\int_c(xdy-ydx)=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\frac{ab}{n}\cdot\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi+\frac{2ab}{n}\cdot\sin^{\frac{2}{n}+1}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi=\frac{ab}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi\cdot\sin\varphi)^{\frac{2}{n}-1}d\varphi.$$

Сделаем замену переменного: $\sin\varphi=z, d\varphi=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ тогда

$$S=\frac{ab}{n}\int_0^1 z^{\frac{2}{n}-1}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{n}-1}dz=\left(z^2=t\right)=\frac{ab}{2n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{ab}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

Пример-2. Определить площадь S фигуры ограниченной кривой $r^4=\sin^3\theta\cos\theta$.

Решение. Кривая имеет две петли в одну и в три четверти; достаточно удвоить площадь одной из них. По формуле для площадь в полярных координатах имеем:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}-1}\varphi\cos^{\frac{3}{2}-1}\varphi d\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)}=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Чтобы вычислить интеграл, так что, используя следующую формулу, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Пример-3. а) Определить площадь S фигуры, ограниченной одним витком кривой $r^m = a^m \cos m\theta$ (m – натуральное число) и б) длину l этого витка.

Решение.

а) $$S = 2\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{2}{m}} m\theta d\theta = \frac{a^2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi d\varphi = \frac{a^2}{m}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)} = \frac{\pi a^2}{\sqrt[m]{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2}.$$

б) По формуле для длины дуги в полярных координатах

$$l = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta d\theta = \frac{2a}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi d\varphi = \frac{a}{m}\cdot 2^{\frac{1}{m}-1}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Пример-4. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$

Решение. Положим $\cos\theta = 1-2\sqrt{\pi}$, тогда $d\theta = \frac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$,

$\sqrt{3-\cos\theta} = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, причем, $0\le u\le 1$. Тогда получим

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Так как $$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi.$$

Ответ $$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2.$$

Пример-5. Показать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$.

Решение. Пологая в формуле

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\quad (0<n<1);\quad n = \omega+\frac{1}{2},$$

получим

$$\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\pi\right)},$$

или $$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{\cos\omega\pi}.$$

Пример-6. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt[5]{t^2}}}$.

Решение. Перепишем данный интеграл в виде $\int_0^1 \left(1-\sqrt[5]{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$. Воспользуемся подстановкой $t^{\frac{2}{5}}=u,\ t=u^{\frac{5}{2}},\ \ dt=\frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}du$ и, следовательно

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt[5]{t^2}}}=\frac{5}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{5}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{15\pi}{16}.$$

Пример-7. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}dx \quad (p,q,m>0)$.

Решение. С помощью подстановки

$$x^m=y,\ 0<y<1,\ x=\sqrt[m]{y},\ dx=\frac{1}{m}y^{m-1}dy$$

предложенный интеграл приводится к виду

$$\int_0^1 y^{\frac{1}{m}(p-1)}(1-y)^{q-1}\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}dy=\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{q-1}dy=\frac{1}{m}B\left(\frac{m}{p},q\right)=\frac{1}{m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+p\right)}.$$

Пример-8. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(\alpha x+\beta(1-x)+\gamma)^{p+q}}dx \quad (\alpha,\beta>0,\ \ p,q>0)$.

Решение. С помощью подстановки

$$\frac{(\alpha+\beta)x}{(\alpha x+\beta(1-x)+\gamma)^{p+q}}=t \text{ или } \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=1-t,\ \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)dx}{(\alpha x+\beta(1-x)+\gamma)^2}=dt.$$

Предложенный интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{B(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}.$$

Пример-9. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi d\varphi \quad (a>0)$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k\varphi d\varphi \quad (|k|<1)$.

Решение. а) Чтобы вычислить интеграл, так что, используя следующую формулу, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad (a,b>0).$$

В частности, при $b=1$, получим отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

С помощью формулы Лежандра этот результат может быть переписан

в виде: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = 2^{a-1}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right).$$

Пример-10. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k\varphi d\varphi \quad (|k|<1)$.

Решение. Наконец, пологая в

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi \ (a,b>0),\ a=1+k \ \text{ и } \ b=1-k,\ \text{где } |k|<1,$$

найдем (используя формулу дополнения)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{k\pi}{2}}.$$

Если в интеграле

$$\mathrm{B}(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx.$$

Сделать подстановку $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, то получим

$$\mathrm{B}(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dx=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

Заменим в обоих случаях функцию В её выражением через Г:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Сокращая на $\Gamma(a)$ и подставляя вместо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ его значения $\sqrt{\pi}$ придем к формуле Лежандра:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТУРАТУРА.

1. В. И.Смирнов курс высшей математики. том II. Издательство «Наука» Главная редакция, физико-математической литературы, Москва 1974.

